この本が目指すもの■■■

　これまで待ち行列問題が解けなかった人、理解できなかった人、苦手意識のある方に、待ち行列のエッセンスを丁寧に伝え、午前で待ち行列問題が出てきても、自力で解けるようにします。

　●この講座では、情報処理技術者試験に頻出の「M/M/1」の待ち行列問題を中心に解説します。

　●数学が苦手な方にも理解できるよう、丁寧に解説しました。

　●公式は１つ覚えれば解けるように、解説しました。ほんと簡単なんですよ。

　●例題をしっかりやって、練習問題などは必要に応じてやってみてください。

出題される試験区分■■

　待ち行列の計算問題が出題される可能性があるのは、初級シスアド以外すべて。初級シスアドも、計算問題は出ませんが、待ち行列がどういうものか、簡単に知っている必要があります。

構成■■

・待ち行列の公式の解説（例題１）
　練習問題１～３
・窓口が複数になった場合の考え方（例題２）
　練習問題１～２
・演習問題１～５・・・もっと演習を積みたい方のために

●本コンテンツは、私が情報処理技術者試験を受験した際に作成した「合格ノート」を元に、大幅な加筆を加えて作成しました。午前問題向けの基本的なものです。

●著者自身の待ち行列の理解には、「末広ページ　待ち行列の基本公式の解説」を参考にしました。わかりやすくコンパクトにまとまっています。こちらも参照してみてください。

http://www.mirai.ne.jp/~suehiro/am/kihonyougo/queuingtheory.htm

●本コンテンツの内容に関し、分からないことや、「もっとここを詳しく解説して欲しい」、「ここに書かれていることだけでは理解できない午前問題がある」、「間違っているのでは！？」というご要望、ご指摘、ご質問を歓迎致します。下記の掲示板に入力お願い致します。

http://6206.teacup.com/baruru/bbs

★「情報処理技術者試験？」→こちらをご覧下さい

http://www.jitec.jp/index.html

★「M/M/1とは？？」　→P４をご覧下さい。

★「合格ノートって？」　→こちらをご覧下さい。

http://www.mirai.ne.jp/~suehiro/lecture/goukakunote.htm

例題１ ■■■

こんな時に便利な待ち行列理論

あなたはこんな経験ありませんか？

平日の昼休みも終わりにさしかかった頃、あなたは今日、後輩と飲みに行く約束をしていたことを思い出しました。お財布を見ると、かなり寂しい状況。いつも、後輩はお財布を出すそぶりこそしますが、払ったことは一度もありません。社会ってそんなものです。あなたは、ATMでお金を下ろそうと、会社の近くの銀行に出向きました。しかし今日は給料日。ものすごい列ができています。昼休みはあと15分。まともに並んだら、午後の始業に間に合わないかもしれません。

とりあえず列に並んだあなたでしたが、上司の嫌みが頭をちらつき、落ち着きません。そのとき、突然記憶がフラッシュバックしました。そういえば先程買い物に行ったコンビニに、ATMが１台ありました！ここからコンビニまでは2分。ATMの操作にかかる時間が3分くらいかな？コンビニから会社までは5分・・・。あなたは、こういう結論に至りました。

「コンビニのATMの待ち時間が５分以内だったら、絶対移動するんだけどな」

こんな時、待ち時間が分かったら便利ですよね。

「ATMを利用する人が、どのくらいのペースで列に並ぶか」、「ATMで操作している時間は、１人当たり何分くらいか」がわかれば、大体の待ち時間が予測できるんです！とっても便利な待ち行列理論です(^^)

では、あなたがコンビニに移動すべきか否か、早速一緒に考えていきましょう。

例題１

ある金融機関の ATM (現金自動預け払い機) が 1 台設置されている。平日の昼休み時 (12 時から 13 時) には，この ATM を毎日平均 15 人が一人当たり平均 3 分の操作時間で利用している。サービス待ちが M/M/1 の待ち行列モデルに従うとすれば，この時間帯の平均待ち時間は何分か。

ア　3　　　イ　6　　　ウ　9　　　エ　12

（出題：ネットワークスペシャリスト午前平成１１年問６３）

これが、待ち行列の公式！

「いきなりネットワークスペシャリスト！？」み、みなさん、パニックをおこなさないでください！(^^; この問題は、待ち行列の問題としては、典型的なんです。この問題が分かれば、待ち行列は半分克服です。１つ１つ、ゆっくり理解をすすめましょう。

では、まず待ち行列の基本の公式をご覧下さい。

待ち行列がM/M/1に従うとき、

$$\text{平均待ち時間} = \frac{\text{利用率}}{1-\text{利用率}} \times \text{平均サービス時間}$$

まずは用語を覚えよう

１つ１つの用語を説明しますね。大切のなのは、平均待ち時間、利用率、平均サービス時間の３つです。

《平均待ち時間》

待ち時間とは、文字通り、列で順番が来るまで待つことになる時間です。正確には「列に加わってから、サービスを開始するまでの時間」です。この場合のサービスとは、ATMの操作ですね。この場合の平均待ち時間とは、「１人の人が列に加わってから、ATMの操作を始めるまでの時間の平均値」となります。

《利用率》

利用率とは、文字通り、そのATMが利用中になっている割合です。１時間のうち、30分間ATMが使用中なら利用率は、50%、つまり0.5になります。式は、30÷60=0.5。単位を合わせます。

《平均サービス時間》

サービス時間とは、文字通り、サービスにかかる時間です。この場合のサービスとは、ATMの操作ですね。平均サービス時間とは、「１人の人がATMの操作にかかる時間の平均値」となります。

《M/M/1》

「M/M/1」って何でしょう？１つ１つ意味を説明すると、はじめの「M」は、「客の到着率は、ポアソン分布に従う」ということを意味します。言い換えれば、お客さんはランダムに到着するということです。「列を見て帰ってしまうお客さんを考えると、列がある時と無い時では到着の間隔も変わってくるのでは」なんて、余計なことは考えなくてよい、ということです。有り難いですね。

次に２番目の「M」は、「サービス時間は指数分布に従う」という意味です。指数分布、とっても難しそうですが、午前問題を解く上では、これも「余計なことは考えなくて良い」、程度に考えてください。「列が長ければ、遠慮して急いで操作するはずだ。だから、サービス時間は短くなる可能性がある！」なんてことは考えなくていいってことですね。

では、３番目の「１」ですが、これは「窓口が１つ」という意味です。もしATMが５台あれば「M/M/5」になります。

M/M/1は、簡単に言えば「窓口は１つで、あとは単純に考えてください」というメッセージであります。

M/M/1について、詳しく知りたい方は、下記のページがわかりやすいです。数学トレーニング講座に待ち行列の記述があります。

「An easy lecture of Math」

http://www.geocities.co.jp/Technopolis-Mars/5427/

またこのコンテンツは、以下のホームページを参考に作成していますが、

http://www.mirai.ne.jp/~suehiro/am/kihonyougo/queuingtheory.htm

こちらで解説している公式は、なんとこんなにシンプルです！

待ち行列＝利用率/(1ー利用率)　　※待ち行列＝窓口で並んでいる人の数

平均待ち時間は、「窓口で並んでいる人数×平均サービス時間」で求められますね。覚えやすい方で、覚えてください。

実際に解いてみよう！

では、公式を使って解いてみましょう。

問題を整理すると、

●求める答え　→　「平均待ち時間」

●分かっていること→「平均サービス時間（３分）」

「平日12時から13時の間に、平均１５人が利用する」

●知りたいこと　→　「利用率」

では、分かっていない「利用率」を求めましょう。ATMが利用中になっている割合、ですから、式にするとこんな感じになります。

$$
\text{利用率} = \frac{\text{ATMが利用中になっている時間}}{\text{全体の時間}}
$$

わり算ですから、単位を揃えなければいけません。では、「分」に単位を統一してみましょう。

全体の時間は、平日12時から13時の間ですから、分になおして「60（分）」です。・・・(1)

そのうちATMが利用中になっている時間を考えると、１人あたりATMを操作する時間は３分で、それが１５人来るのですから、3×15＝45（分）になります。・・・(2)

利用率＝(2)/(1)＝45/60=3/4

役者はそろいました！早速公式に当てはめてみましょう。公式は覚えていますか？

計算は、わり算が入ります。単位を確認しましょう。先程「分」で統一したのでOKですね。ではいざ！

$$
\text{平均待ち時間} = \frac{3/4}{1 - 3/4} \times 3 = 3 \times 3 = 9
$$

まあ、あっけない！(^^;答えは９分でした。あなたは、コンビニに行ったら遅刻する可能性大！危なかったですね。試験では「ウ」にマークをしましょう。くれぐれも「覚悟を決めて銀行に並ぶ」なんて書かないでくださいね。

Ans.ウ

ところで、平均待ち時間を求める公式の、「１－利用率」って何だと思いますか？利用率って何でしたっけ？そうです。全体の時間のうち、窓口が利用中になっている時間の割合でした。これを１（=100%＝全体の時間）から引いているのですがら・・・もうおわかりですね。窓口があいている割合なんです！

つまり、平均待ち時間を求める公式の、「利用率/(1-利用率)」の部分は、窓口が利用中の時間と、あいている時間の比なんですね。数字をいろいろ変えて試してみてください。窓口が利用中の時間が大きければ、待ち時間も長くなる。窓口があいている時間が大きければ、待ち時間は短くなる。｢そりゃそうだよ！」。ね、待ち行列って、簡単でしょう(^^)

これで、M/M/1の待ち行列の核の部分は伝えきりました。これが待ち行列の典型問題です。折角ですから、もう一度この問題を、解説を見ずに解いてみてください。どうでした？合ってました？では、次は自力で解いてみましょう！

練習問題１■■

問題

あなたはバーゲンで洋服を買いに来ました。試着室は１つしかありません。試着には、平均４分かかります。平均して５分に１人の間隔で試着を申し出ています。M/M/1の待ち行列モデルに従うとき、平均待ち時間は何分ですか？

ポイント

考える時間の範囲（先程の問題では「12時から13時」とありました）が指定されていませんが、こういうときは、自分で考えやすい値をおいて考えてみましょう。基本的には、例題の数字を変えただけですので、自力で解けますよ！まず、求める答え、分かっていること、知りたいことをまとめてみましょう。

解説

では、問題をまとめてみましょう。M/M/1の待ち行列モデルに従うので、あの公式が使えそうです（公式を忘れてしまった方はP3）。ちなみに、この問題の場合のサービスとは何でしょう。そうです。「試着室の使用」ですね。

●求める答え　　→　「平均待ち時間」
●分かっていること→「平均サービス時間（４分）」
　　　　　　　　　　「５分に１人の間隔で、試着室を使用する」
●知りたいこと　→　「利用率」

では、利用率を求めていきましょう。「利用率＝利用中になっている時間/全体の時間」でした。考える時間の範囲が指定されていないので、全体の時間がいくつか迷いますが、こういう時は、自分の考えやすい値で考えて構いません。では、考えやすく60分にしてみましょう。・・・(1)

この60分のうち、利用中になっている時間を求めます。５分に１人の間隔で来る、ということは、60分で１２人来ます(60/5=12）。１人あたり、４分利用しますから、4×12＝48(分）となります。・・・(２)

利用率＝(2)/(1)＝48/60＝4/5

さあ、公式に当てはめますよ！

$$\text{平均待ち時間} = \frac{4/5}{1 - 4/5} \times 4 = 4 \times 4 = 16$$

Ans. 16分

答えは１６分でした！１６分か〜、待ちますねぇ。実際には、試着室は２つ以上のところが多いので、こんなに待った経験を持つ人はおそらくいないでしょう。

ここで「試着室が２つあったらどうなるんだろう？」と思ったあなた！とってもいいセンスしてます！実は数学得意なんじゃないですか？後で解説していますのでお楽しみに！

練習問題２■■

問題

平均２件／秒の割合で発生するトランザクションを、１件当たり平均０．３秒で処理するシステムがある。トランザクションの発生及び処理がＭ／Ｍ／１待ち行列モデルに従うものとすると、システムの平均応答時間は何ミリ秒か.

ア　３００　　イ　４５０　　ウ　７５０　　エ　１，５００

（出題：プロダクションエンジニア午前平成９年問41）

ポイント

新しい用語が出てきました。

《平均応答時間》

平均応答時間は、「列に並び初めてから、サービスが完了するまでの時間」の平均をいいます。先程のATMの例では、「列に並び始めてから、ATMの操作が終わるまでの時間」の平均ですね。言い換えると、「列に並んでいる時間＋ATMの操作をしている時間」となります。先程の問題では、「列に並んでいる時間＝平均待ち時間」「ATMの操作をしている時間＝平均サービス時間」でした。つまり、

平均応答時間＝平均待ち時間＋平均サービス時間

なんです。要するに、平均応答時間を求めるにも、「サービスを利用する人が、どのくらいのペースで列に並ぶか」、「サービスの時間は、１人当たり何分くらいか」がわかれば解けてしまいます。恐れることはありません。

解説

問題を整理しましょう。この場合のサービスとは、「処理」ですね。

●求める答え　＝　「平均応答時間」

●分かっていること＝「平均サービス時間（0.3秒）」

「平均２件/秒でトランザクションが発生」

●知りたいこと＝　「平均待ち時間」「利用率」

では、先程までのように平均待ち時間を求めるために、「利用率」から求めていきましょう。これま考える時間の範囲が決まっていません。考えやすいもの・・・求める答えが「ミリ秒」なので、1000ミリ秒としましょうか。全体の時間は1000ミリ秒。この1000ミリ秒中に発生し待ち行列に並ぶトランザクションは、2件。1件0.3秒、つまり（単位をそろえて）300ミリ秒かかりますから、2×300=600（ミリ秒）。

よって利用率は、600/1000＝3/5。

これで「平均待ち時間」を求める準備ができました。公式、覚えていますか？（確認はP3）

単位を揃えたらいざ代入！

$$平均待ち時間 = \frac{3/5}{1 - 3/5} \times 300 = 450$$

平均応答時間は、列に並んでいる時間（＝平均待ち時間）とサービスを利用している時間（＝平均サービス時間）ですから、450＋300＝750（ミリ秒）

Ans.ウ

練習問題３ ■■

問題

トランザクションの平均到着間隔が１／λ、平均サービス時間１／μのオンラインシステムにおいて、トランザクションの平均到着間隔が０．５／λ、平均サービス時間が０．５／μになったときの説明として、適切な記述を二つ選べ

ア　サービス時間が短縮したので、システムの利用率は減少する。
イ　到着間隔が短くなったが、系内の待ちトランザクション数は変化しない。
ウ　到着間隔が短くなったが、系内の待ちトランザクション数は増える。
エ　到着間隔とサービス時間が短くなったので、平均応答時間は減少する。

（出題：システムアナリスト　平成６年問24）

ポイント

新しい用語が出てきました。

《待ちトランザクション数》

文字通り、列で順番を待っているトランザクションの数です。「待ち行列」と表現する場合もあります。

これを求めるには、どうしたらいいでしょうか。これまでの知識をフル活用して考えてみましょう。

平均待ち時間を言い換えると、「並んでいる人全員が処理を終えるまでの時間」です。例えば、１人に４分かかるとします。５人並んでいたら、待ち時間は４×５＝１６(分)です。では、待ち時間が２０分だとしましょう。同じように１人に４分かかるとしたら、並んでいる人数は何人でしょうか。そうです。２０/4＝５人です。つまり、並んでいる人数（待ち行列）は、平均待ち時間/平均サービス時間で求められます。

勘のいい人は、もうお気づきではないでしょうか。「待ち行列＝利用率/(1ー利用率）」なんです！公式を思い出してみてくださいね。

$$平均待ち時間 = \frac{利用率}{1 - 利用率} \times 平均サービス時間$$

この式の両辺を、平均サービス時間で割ってみましょう。

$$\frac{平均待ち時間}{平均サービス時間} = \frac{利用率}{1-利用率} \times \frac{平均サービス時間}{平均サービス時間}$$

平均サービス時間/平均サービス時間は１。また、「平均待ち時間/平均サービス時間＝待ち行列」ですから代入すると、

$$待ち行列 = \frac{利用率}{1-利用率}$$

となります。

《平均到着間隔と平均到着率》

平均到着間隔って、何でしょう？文字通り、１件（人）のお客さんやトランザクションが「到着する間隔の平均」です。先程の応答時間を求める問題では、お客さんの到着は「平均２件/秒」でした。１件当たりになおすと、0.5秒に１件到着することになります。よって、平均到着間隔は0.5秒、となります。

ところで、なぜこんな変な文字使っているんでしょう。

１単位時間（考える時間の範囲）当たりに列に並ぶお客さんの数を、平均到着率といいます。先程の応答時間を求める問題では「２件」になります。この平均到着率をλで表すことになっているようです。

この平均到着率と、平均到着間隔の関係は、逆数になっているんですよ。0.5と２。ね、逆数でしょう？

平均到着間隔＝１／平均到着率

それを意識して、この問題では、平均到着間隔の値を「１／λ」としているんでしょうね。

《平均サービス時間と平均サービス量》

同じように、平均サービス量をμとすることになっています。平均サービス量とは、「１単位時間にフルにサービスを利用して処理できるトランザクション（客）の数」を言います。先程の問題の平均サービス量を考えてみると、１件の処理に300ミリ秒かかりますから、1000ミリ秒だと、3.3・・件となりますね。平均サービス時間と、平均サービス量はこれまた逆数の関係があります。

平均サービス率＝１／平均サービス量

なので、平均サービス時間の値を１／μとしているんでしょう。

解説

問題を整理してみましょう。

●求める答え　→　「適切な記述二つ」

●分かっていること→「平均サービス時間（0.5／μ）」

「平均到着間隔（0.5／λ）」

●知りたいこと　→　「利用率」「待ちトランザクション数」「平均応答時間」

では、選択肢アの「利用率」から考えてみましょう。「利用率＝利用中になっている時間/全体の時間」でした。利用中になっている時間は、「考える時間の範囲に到着する人×平均サービス時間」で求めてきましたね。平均到着間隔と平均サービス時間が、半分になると、どう影響してくるのでしょうか。簡単な数を入れて考えましょう。１つ前の問題を例に考えます。

平均到着間隔は0.5秒でした。考える時間の範囲を１秒としたとき、到着する人数は、２人です。また、平均サービス時間は、0.3秒です。利用率を求めると、2×0.3/1＝0.6となります（わかりにくい人は、先程やったように、単位をミリ秒にして、先程の解説を参考に考えてみてください）。

では、変更後の時間を考えてみましょう。まず、平均到着間隔が0.5秒の半分、0.25秒になります。すると、１秒の内に４人到着することになります。つまり、到着間隔が半分になると、単位時間内に倍の人が来るようになるのです！しかし、平均サービス時間は0.3秒の半分、0.15秒という条件でした。すると利用率は、4×0.15/1＝0.6となります。変わらないんですね。

よって、アは不正解です。

「待ちトランザクション数」を考えましょう（ちなみに「系内」とは、待ち行列系（列の最後尾から、処理中のトランザクションまで）内、ということです）。待ちトランザクション数（待ち行列）は、「利用率/1ー利用率」でした。選択肢アより「利用率は変化しない」ことが分かりました。よって、「利用率/1ー利用率」も変わりません。よって、イは正解。ウは不正解になります。

倍の人が来ても、サービス時間が半分なら、列の長さは変わらない。この事実は、なんとなく直感的に理解できますね。

「平均応答時間」を求める、エも検証してみましょう。

平均応答時間　＝　平均待ち時間　＋平均サービス時間

↓

$$= \frac{\text{利用率}}{1-\text{利用率}} \times \text{平均サービス時間} + \text{平均サービス時間}$$

わかりにくそうなときは、実際に簡単な数を入れて考えるのが鉄則です。先程のシステムの平均応答時間を求める問題の具体的な数字を入れてみましょう。選択肢アより、以下のことが分かっています。

●求める答え→　「平均応答率」

●分かっていること→「利用率」、「平均サービス時間」

変更前の利用率は、0.6、平均サービス時間は0.3秒でした。よって、平均応答時間は、

平均応答時間（前）＝　0.6/(1-0.6)×0.3　＋　0.3　＝ 0.75・・・・(1)

では、変更後の時間を考えてみましょう。利用率は、0.6で変更なし。平均サービス時間は、0.15秒でした。

平均応答時間（後）＝　0.6/(1-0.6)×0.15　＋　0.15　＝0.375・・・(2)

(1)と(2)を比較すると・・・減少していますね。よって、エは正解です。

Ans.イ、エ

例題２■■■

窓口を増やそう！

さて、先程の試着室の問題では、試着室が１つのために、１６分も待たされてしまいました！では、試着室を２つにすると、待ち時間はどうなるでしょう？これは、サービスの窓口が２つ。つまり「M/M/1」ではなく「M/M/2」の待ち行列モデルになるのです。しかし、考え方はこれまでと一緒です。では、一緒に考えていきましょう。

例題２■■

あなたはバーゲンで洋服を買いに来ました。よほど苦情が多かったのでしょう。試着室が２つになっていました。試着には、平均４分かかります。平均して５分に１人の間隔で試着を申し出ています。M/M/２の待ち行列モデルに従うとき、平均待ち時間は何分ですか？

窓口が２つになると何が変わる？

これも、考える時間の範囲が示されていないので、考えやすい６０分(＝１時間)の範囲で考えましょう。試着室が１つだと、１時間のうち、試着室が試着を提供できる時間は当然60分分(ぶん)です。すなわち全体の時間は60分です。

しかし、試着室が２つになれば、１時間に120分分のサービスを提供できます。つまり、全体時間が倍になるということですね！

もちろん、試着室が３つになれば、１時間に180分分のサービスが提供できるので、全体時間は３倍に。この調子で、試着室の数に応じて、全体時間が４倍、５倍・・・と増えていきます。

「全体時間が変わるって事は、利用率が変わってくるのかな？」と感づいたあなた！これまたいいセンスしてます！では、実際に問題を解く中で、窓口の数が変わると、どう影響していくのか、一緒に考えていきましょう。

窓口２つを攻略！

ではこれまでの知識を総動員して解きましょう！まずは、問題の整理です。

●求める答え　＝　「平均待ち時間」
●分かっていること＝「平均サービス時間（4分）」
　　「平均５分で１人試着を申し出る。」
　　「全体の時間(120分）」
●知りたいこと＝　「利用率」

利用率は「利用中になっている時間/全体の時間」でしたね。まず利用中になっている時間を求めると、１時間の範囲で来るお客さんは、５分に１人、なので12人です（60/5=12）。この人全員４分づつ試着

室を利用すると考えますと、12×4＝48分ですね。

全体の時間は、試着室が２つあるので、考える時間の範囲の倍になりますから、120分（60×2＝120）です。よって利用率は、48/120となります(48/120 = 2/5）。

では、公式に代入してみましょう。

$$\text{平均待ち時間} = \frac{2/5}{1 - 2/5} \times 4 = 8/3$$

驚き！答えは8/3分です。これは、3分以下ですよ。同じ条件で、試着室が１つのときは１６分も待つ可能性があったのに、試着室が１つ増えただけで3分以下なんて！試着待ちで困っているショップの店長さんは、ぜひ試着室を１つ増やして欲しいですね！

Ans.8/3分

窓口が増えることで、全体時間が変わる。このことをしっかり抑えておいてくださいね。

練習問題１ ■■

では、練習問題で知識を定着しましょう。先程の昼休みのATMの問題。今並んでいる、銀行のATMの待ち時間が分かれば、尚更便利ですよね。銀行にはATMが複数台ありますが、もう解ける力はついているはずです。これまでの知識を総動員して解いていきましょう。

問題

この銀行の支店には、ATMが４台設置されている。この銀行では、平日12時から13時の時間帯に、平均して60人のATM利用者が訪れる。ATMの操作に１人平均３分かかる。M/M/4の待ち行列モデルに従うとき、平均待ち時間を求めよ。

ポイント

窓口が４つになりました。全体時間はどう変化しますか？

解説

では、一緒に解いていきましょう。まず問題を整理します。

●求める答え　　　→「平均待ち時間」

●分かっていること→「平均サービス時間（3分）」

「12時から13時で80人の利用者」

●知りたいこと　　→「利用率」

さあ、利用率を求めましょう。まず、全体の時間は、考える時間の範囲である60分の４倍になりますね。窓口が１つだと、60分の間に60分分のサービスしか提供できませんが、窓口が４つあるので60×4=240分ぶんのサービスを提供できます。よって、全体の時間は240分になります。

このうち、利用中になっている時間は、60人の利用客が3分づつ利用しますから、60×3＝180(分）です。よって利用率は、180/240＝3/4となります。

では、公式に代入してみましょう。

$$\text{平均待ち時間} = \frac{3/4}{1 - 3/4} \times 3 = 9$$

こちらも待ち時間が9分でした。移動時間を考えると、やはりこちらに並んで正解でしたね！

Ans. ９分

練習問題２■■

ATMに関する過去問がありました！早速、解いてみましょう。「コンビニにもう１台あったら待ち時間はどうなるんだろう？」なんて考えながら、解いてみてくださいね。

問題

ある銀行の支店に自動支払機が１台設置してある。この支店は、自動支払機の利用率の増加に伴い、もう１台自動支払機を増設することにした。自動支払機のサービス時間をＴｓ、増設前の自動支払機の利用率をρとするとき、自動支払機の増設後の平均待ち時間として正しいのはどれか。ここで、待ち時間はM/M/1の待ち行列に従い、平均待ち時間にはサービス時間を含まないものとする。また、自動支払機の増設後は、２台の自動支払機は均等に利用されるものとする。

ア　（２ρ／１－ρ）×Ｔｓ

イ　（ρ／２（１－ρ））×Ｔｓ

ウ　（２ρ／１－２ρ）×Ｔｓ

エ　（ρ／２－ρ）×Ｔｓ

（出題：平成１１年春期データベーススペシャリスト）

ポイント

窓口が増えると変化するものは何でしたか？そうです。「全体の時間」でした。全体の時間は、公式の中で、利用率の分母に使われています。１つ１つ考えていきましょう！

解説

では、問題の整理から参りましょう。注意しなければいけないのは、ここで与えられている値(文字)は、増設前の利用率です。「窓口の数が変わる→全体の時間が変わる→利用率が変わる」のですから、利用率は新たに求めなければなりません。ちなみにサービス時間は、窓口が増えようが増えまいが変わりませんので、Tsをそのまま使うことが出来ます。

- ●求める答え　　　→「平均待ち時間」
- ●分かっていること→「平均サービス時間（Ts）」、「１台の時の利用率（ρ)」
- ●知りたいこと　　→「増設後の利用率」

では、利用率を求めます。求める利用率を(ρ2)としましょう。利用率の公式はこんな感じでした。

$$\text{利用率}(\rho) = \frac{\text{ATMが利用中になっている時間}}{\text{全体の時間}}$$

増設後、ATMは２台になります。すると、サービスを提供できる時間（全体時間）は、２倍になりますから、

$$\text{利用率}(\rho 2) = \frac{\text{ATMが利用中になっている時間}}{\text{全体の時間} \times 2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\text{ATMが利用中になっている時間}}{\text{全体の時間}}$$

増設前の利用率(ρ)の式と比べてみてください。（ρ２）＝ρ/2になっています。つまり、利用率が半分になるのですね。増設後の利用率(ρ2)が求められました。公式に代入してみましょう。

$$\text{平均待ち時間} = \frac{\rho/2}{1 - \rho/2} \times Ts$$

式が複雑ですね。シンプルになるよう、分母と分子に２をかけてみましょう。

$$\text{平均待ち時間} = \frac{2 \times \rho/2}{2(1 - \rho/2)} \times Ts = \frac{\rho}{2 - \rho} \times Ts$$

エの式になりました！

Ans.エ

ちなみに、窓口が３つになったら、全体時間（＝利用率の分母）は３倍になりますから、利用率は1/3になります。よって、

平均待ち時間＝（ρ／3－ρ）×Ｔｓ

となります。窓口が４つなら？そうです。平均待ち時間＝（ρ／４－ρ）×Ｔｓになりますね。「？」な人は、この問題を参考に、実際に計算してみてください。

演習問題■■■

もっと問題演習をしたい方のために、問題をご用意しました。理解を深め、記憶を定着させるには問題演習がいちばんですよ。新しい事柄も出てきます。学習を発展させて、待ち行列に強くなって下さい！

演習問題１■■「適用事例」

初級シスアドでも、ばっちりでてます！

問題

待ち行列モデルの適用事例として，適切なものはどれか。

ア　1回当たりの発注コストや1個当たりの在庫維持コストなどを基に，在庫商品の発注量を決定する。

イ　過去の売上データを基に，次年度の売上を予測する。

ウ　画像情報の密度，大きさ，平均圧縮率，通信速度などを基に，必要な通信時間を計算する。

エ　平均対応時間や電話の平均受付回数などを基に，問合せに対応するサービスデスク要員数を決定する。

（出題：初級シスアド平成12年春期試験午前問13 ）

ポイント

ここまで問題を解いてきた方にはもうおわかりでしょうか？ヒントを３つ出します。

A，待ち行列、とは何でしたか？何がわかれば、何が求められましたか？

B，公式を思い出してみてください。どんな要素を用いたでしょうか。

C，今まで解いた問題と、一番近いシチュエーションはそれでしょうか。

解説・答え

待ち行列を用いて考えることが出来るものを選ぶ問題です。

待ち行列とは、行列のできるサービスにおいて、その待ち時間を推定するもの

です。

選択肢を一つ一つ検討していきましょう。

ア：「コスト」とありますが、待ち行列モデルで、コストや金額を考えることはできません。公式にも、そんな要素なかったですよね？

イ：これも「売上げ」とありますが、待ち行列モデルで金額を考えることはできませんでした。

ウ：待ち行列モデルは、行列ができるサービスを考えるものでした。到着の間隔や、サービス時間、窓口の数を元に、待ち行列や待ち時間を推定します。これらの要素がウにはないので、不正解です。

エ：「平均対応時間＝平均サービス時間」、「平均受付回数＝到着率」、「要員数＝窓口」と考えることが出来ます。これが正解です。

Ans.エ

演習問題２■■「M/M/1」

さて、M/M/1の意味、覚えてますか？

問題

Ｍ／Ｍ／１の待ち行列モデルに関して、正しい記述はどれか。

ア．一定時間に到着する客の数は指数分布に従う。

イ．客が立ち去ることがある。

ウ．サービス時間は指数分布に従う。

エ．待ち行列の長さに制限がある。

オ．窓口は複数個のことがある

（出題：一種午前平成７年問４０）

ポイント

M/M/1の意味、覚えてますか？覚えていない方は、Ｐ４で復習をどうぞ。

不正解の中には、これまで説明してこなかったことがあります。正解を一つ、自信を持って選んでください。

解説・答え

M/M/1が何を意味するのかを問う問題です。

ア：はじめの「M」の部分ですね。指数分布ではなく、ランダムに到着する「ポアソン分布」でした。

イ：お客さんが立ち去ることはありません。これは、M/M/1の前提となっています。

ウ：２番目の「M」の部分ですね。正解です。

エ：M/M/1の正しい表記は、M／M／１／∞なんです。∞の意味は「無限」です。待ち行列に制限がないことを意味しています。

オ：３番目の「１」の部分ですね。３番目の部分は窓口数を示すのでした。「１」とあるので、不正解です。

Ans.ウ

演習問題３■■「平均修理時間」

問題

社内に 100 台のコンピュータが稼働しており，１ 日(8 時間とする)に 3 台の割合で故障する。修理の待ち行列が M/M/1 の待ち行列モデルに従う場合，故障してから修理が完了するまでの平均時間を 8 時間とするには，平均修理時間を何時間にすればよいか。

ア　1　　イ　2　　ウ　3　　エ　4

（出題：システム監査技術者午前平成13年問３）

ポイント

問題の単語を公式の言葉に置き換えて考えるとわかりやすいですよ。今回は、平均サービス時間を求める問題です。

解説・答え

数や言葉がややこしいですね。公式に当てはめる前に、問題を整理してみましょう。ちなみにこの場合のサービスとはなんでしょうか？そう。修理ですね

求める答え　　　→「平均サービス時間（平均修理時間）」

わかっていること→「平均応答時間（故障してから修理が完了するまでの平均時間＝８時間）」

「平均到着率（１日３台）」

知りたいこと　　→「利用率」「平均待ち時間」

まず、知りたい利用率から求めますね。この場合「利用率＝修理中の時間/全体の時間」です。全体の時間は８時間、この間には３台サービスを受ける。平均サービス時間は・・・ありませんから、tとしておきましょう。すると「利用率＝３t/８」となります。

では平均待ち時間を考えましょう。公式を利用して

$$平均待ち時間＝\frac{3t/8}{1-3t/8}\times t = 3t^2/(8-3t)$$

次に求める答え、平均サービス時間を求めます。平均応答時間がわかっているので、利用します。平均応答時間は、待っている時間（平均待ち時間）と、自分がサービスを受け終わるまでの時間（平均サービス時間）の和ですから、式を変形して、

平均サービス時間＝平均応答時間ー平均待ち時間

これまで求めた値を代入して、

$$t = 8 - 3t^2/(8-3t)$$
$$t(8-3t) = 8(8-3t) - 3t^2$$
$$8t - 3t^2 = 64 - 24t - 3^2$$
$$32t = 64$$
$$t = 2$$

Ans.イ

演習問題４■■「Wとρの関係」

次の問題は、平均待ち時間と利用率の関係を通して、公式を理解しているかどうかを問う問題です。

問題

M/M/1の待ち行列モデルにおける，平均待ち時間(W)と窓口利用率(ρ)の関係で，ρが0.25から0.75になったとき，Wは何倍になるか。

ア 1/3　　イ 3　　ウ 4.5　　エ 9

（出題：情報セキュリティアドミニストレータ平成14年午前問４）

ポイント

待ち時間を求める公式に、0.25と0.75を当てはめて、両者を比較するのが、手っ取り早いですね。早速確かめてみましょう。

解答

平均待ち時間を求める公式に、ρ=0.25、ρ=0.75を代入して比較します。式を見やすくするために、「平均サービス時間＝Ts」と置きます。

ρ=0.25のとき(A)

$$W = 0.25/(1-0.25) \times Ts = 0.25/0.75 \times Ts = 1/3 \times Ts$$

ρ=0.75のとき(B)

$$W = 0.75/(1-0.75) \times Ts = 0.75/0.25 \times Ts = 3 \times Ts$$

Aの時のWは、BでX倍になっているとすると、

$$W(A) \times X = W(B)$$
$$1/3 \times Ts \times X = 3 \times Ts$$
$$1/3 \times X = 3$$
$$X = 9$$

よって、答えは９倍になります。 Ans.エ

演習問題５■■「文字で考える」

問題

通信回線を使用したデータ伝送システムに M/M/1 モデルの待ち行列理論を適用すると，平均回線待ち時間，平均伝送時間，回線利用率の関係は次の式で表される。

平均回線待ち時間＝平均伝送時間 × 回線利用率 ／ (1 － 回線利用率)

平均回線待ち時間が平均伝送時間よりも長くなるのは，回線利用率（％）がどの値を超える場合か。

ア　４０　　イ　５０　　ウ　６０　　エ　７０　　オ　８０

（出題：第一種午前平成８年問35）

ポイント

今回は、式が与えられているので、簡単ですね♪しかし、数字が与えられていません。数字が与えられていないときは・・・とりあえず文字で置き換えて考えてみましょう。

解説

求めるのは、「平均回線待ち時間が平均伝送時間よりも長くなる」時の、「回線利用率」です。長くなるとき、とは、短い→長いの境界です。言い換えると、「平均回線待ち時間が平均伝送時間とイコールになるときの回線利用率」です。

平均回線待ち時間（＝平均伝送時間）をt、回線利用率をρとおいてみましょう。

$$t = t \times \rho/(1-\rho)$$
$$t(1-\rho) = t\rho$$
$$1-\rho = \rho$$
$$2\rho = 1$$
$$\rho = 0.5$$

単位は％ですから、答えは50％です。 Ans.イ

【目次】